

WÄRMEÜBERTRAGUNG BEI NATÜRLICHER KONVEKTION, INSBESONDERE DURCH STOFFE IN DER NÄHE IHRES KRITISCHEN ZUSTANDES

Von ERNST SCHMIDT

München

DAS einfachste Mittel, die Wärmeübertragung von einer festen Oberfläche an ein flüssiges oder gasförmiges Medium zu steigern, ist die Erhöhung der Geschwindigkeit, mit der das Medium sich relativ zur Oberfläche bewegt, man spricht dann von *aufgezwungener Strömung*.

Wird das flüssige Medium allein durch Temperaturdifferenzen und die damit verbundenen Auftriebsunterschiede im Schwerfeld in Bewegung gesetzt, so nennt man das *natürliche* oder *freie Konvektion*. Diese freie Konvektion erfordert keine besonderen Einrichtungen zur Erzeugung der Geschwindigkeit und ist daher ein sehr einfaches Mittel, die Wärmeabgabe über den Betrag der einfachen Wärmeleitung hinaus zu steigern. Sie wird deshalb oft angewandt, z.B. als Flüssigkeitskühlung von Verbrennungsmotoren, bei der Wärmeabgabe von Heizkörpern, beim Wärmedurchgang durch mehr oder weniger dicke Flüssigkeitsschichten u.s.w. Die dabei erreichbaren Wärmeübergangszahlen sind in der Regel von bescheidener Grössenordnung, da die normale Schwerebeschleunigung in Geräten von wenigen Metern Höhe keine grossen Geschwindigkeiten erzeugt. Die Verhältnisse ändern sich aber bei grossen Abmessungen wie etwa in der Atmosphäre mit ihrer Schichtdicke von mehr als 10 km, oder bei grösseren Beschleunigungen, wie sie in rotierenden Körpern durch die Zentrifugalkraft auftreten und die in Turbomaschinen leicht das 30 000-fache des Normwertes der Fallbeschleunigung erreichen. Dazu können auch die Eigenschaften der Flüssigkeit das Auftreten natürlicher Konvektion sehr begünstigen, wenn man diese in der Nähe ihres kritischen Zustandes verwendet, wo der Ausdehnungskoeffizient sehr hohe Werte annimmt und schliesslich im kritischen Zustand selbst unendlich wird. Ein weiterer die Wärmetransportleistung der Flüssigkeit wesentlich steigernder Umstand ist die Tatsache, dass auch die spezifische Wärme der Flüssigkeit hier gegen unendlich geht, während die Zähigkeit, welche Strömungsbewegungen verhindert, im kritischen Zustand ihren kleinsten im flüssigen Gebiet möglichen Wert erreicht.

Solche Verhältnisse ergeben sich fast zwangsläufig bei der Kühlung von Gasturbinenschaufeln mit Hilfe von radialen Bohrungen, in die

Wasser von einem im Läufer durch Fliehkraft gebildeten Wasserring eindringt, was man wie folgt einsieht: Die Schaufel wird durch die Fliehkraft ihrer eigenen Masse beansprucht, die sich bei über die ganze Länge gleichbleibendem Querschnitt von der Schaufelspitze bis zum Schaufelfuss durch Integration der Fliehkräfte über ein Material von der Dichte $7,85 \text{ g/cm}^3$ integriert bis zu einer bei Temperaturen von 400°C zulässigen Zugspannung am Schaufelfusse von vielleicht 2000 at. Der Druck in der Bohrung der Schaufel integriert sich in ähnlicher Weise vom Schaufelfuss bis zum Schaufelende über eine Flüssigkeit von etwa zehnmal kleinerer Dichte und führt deshalb auf vielleicht 200 at, also in die Nähe des kritischen Zustandes, der für Wasser bekanntlich bei 225 at und 374°C liegt. Durch dieses zufällige Verhältnis der Dichten von Stahl und von Wasser kommt man bei der Flüssigkeitskühlung von Dampfturbinenschaufeln am Ende der Bohrungen gerade in das kritische Gebiet des Wassers. Der Wärmeübergang vollzieht sich allein durch natürliche Konvektion, weil bei den hohen Fliehkraftbeschleunigungen der Druck und damit die Sättigungstemperatur des Wassers mit dem Radius stark ansteigt, sodass kein Verdampfen eintritt.

Von der Grösse der treibenden Kräfte der natürlichen Konvektion in Fliehkraftfeldern erhält man eine Vorstellung, wenn man bedenkt, dass beim 30000-fachen der normalen Schwerebeschleunigung und einer Wassertemperatur von etwa 340°C (also noch 34° unter der kritischen Temperatur) ein Wasserteilchen, das nur 10°C wärmer ist als seine Umgebung, einen mehr als 1000 mal grösseren Auftrieb erfährt als eine Luftblase gleicher Grösse in Wasser von Zimmertemperatur bei gewöhnlicher Fallbeschleunigung.

Die Frage der Wärmeübertragung bei natürlicher Konvektion ins-

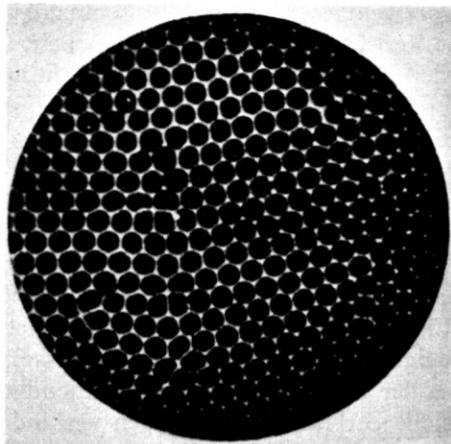


ABB. 1. Zellenmuster der Konvektionsbewegungen in einer von unten geheizten Ölschicht von 1 mm Dicke mit freier Oberfläche bei 100°C Bodentemperatur nach H. Benard.

besondere durch Stoffe in der Nähe ihres kritischen Zustandes ist deshalb auch von praktischem Interesse.

Den Beginn der natürlichen Konvektion kann man am besten an ebenen Flüssigkeitsschichten studieren, die an ihrer Unterseite beheizt und an der Oberseite gekühlt werden. J. Thomson⁽¹⁾ beobachtete dabei schon 1882 regelmässige Strömungsmuster und H. Benard⁽²⁾ zeigte 1900 an 1 mm dicken Ölschichten mit freier Oberfläche, die von unten beheizt werden, das Auftreten regelmässiger sechseckiger Zellen, wie sie Abb. 1 nach einer schönen Aufnahme von Benard wiedergibt.

J. W. Rayleigh⁽³⁾ behandelte 1916 diese Bewegungsform theoretisch und konnte durch Stabilitätsbetrachtungen nachweisen, dass bei einem bestimmten kritischen Wert, der später nach ihm benannten Rayleigh-Zahl Ra , die Konvektion einsetzt. Bei kleineren Werten von Ra ist die Flüssigkeit in Ruhe und überträgt Wärme nur durch Leitung. Die Rayleigh-Zahl, die man auch als Produkt der

$$\text{Grashof-Zahl} \quad Gr = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu^2}$$

$$\text{und der Prandtl-Zahl} \quad Pr = \nu/a$$

deuten kann, ist definiert durch die Gleichung

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu a}$$

dabei ist

- g die Beschleunigung des Schwere- oder Fliehkraftfeldes
- β der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit
- θ eine kennzeichnende Temperaturdifferenz des Problems
- h eine kennzeichnende Abmessung der Anordnung
- $\nu = \eta/\rho$ die kinematische Zähigkeit
- $a = \lambda/c_p\rho$ die Temperaturleitfähigkeit der Flüssigkeit
- η die dynamische Zähigkeit
- ρ die Dichte der Flüssigkeit
- c_p ihre spez. Wärme und
- λ ihr Wärmeleitvermögen.

Rayleigh fand für den kritischen Wert seiner Zahl die Grösse

$$(Ra)_k = 1700.$$

Jeffrey⁽⁴⁾ berechnete für eine von ebenen Platten begrenzte Schicht den etwas höheren Wert 1709,5 und Low⁽⁵⁾ fand nach einer anderen Methode den Wert 1704. Versuche^(6, 7) lieferten etwas höhere Werte bis zu 1800 und zeigten, dass für $Ra > 45000$ turbulente Konvektionsformen auftreten.

Da die vorliegenden Versuche sich nur mit der Ermittlung der kritischen Rayleigh-Zahl beschäftigen und keine Angaben über die beförderten Wärmemengen enthalten, wurden auf meine Veranlassung in meinem Laboratorium an der Technischen Hochschule München von

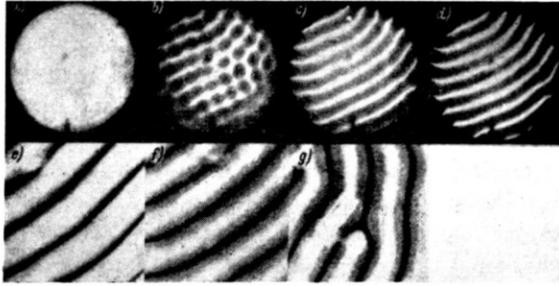


ABB. 2. Konvektionsmuster bei Silikonöl AK 350 von 7 mm Schichtdicke (Öl grosser Zähigkeit)
 (a) ohne Konvektion bei $Ra = 1500$
 (b) bei Beginn der Konvektion, $Ra = 1800$, $\lambda_k/\lambda = 1,03$
 (c) bei $Ra = 2040$ und $\lambda_k/\lambda = 1,12$
 (d) bei $Ra = 2560$ und $\lambda_k/\lambda = 1,33$
 (e) bis (g) vergrösserte Teilbilder (Negative).

P. L. Silveston⁽⁸⁾ Messungen des Wärmedurchgangs durch von festen ebenen Metallplatten begrenzte Schichten einer Anzahl von Flüssigkeiten bei einer Reihe von Schichtdicken durchgeführt, deren Ergebnisse in Abb. 4 enthalten sind. Darin ist das Verhältnis der scheinbaren, d.h. den Einfluss der Konvektion mit umfassenden Wärmeleitfähigkeit λ_k zur Wärmeleitfähigkeit λ der ruhenden Flüssigkeit über der Rayleigh-Zahl in logarithmischen Maßstäben aufgetragen. Die Versuche wurden an kreisförmigen Flüssigkeitsschichten von 200 mm Durchmesser und 0,5 bis 13 mm Dicke durchgeführt, entsprechend einem Bereich der Rayleigh-Zahlen von 400 bis 400000. Sie zeigen, dass für $Ra < 1750$ keine Konvektion vorhanden ist und Wärme nur durch Leitung übertragen wird. Bei dem kritischen Wert $Ra = 1750$ steigt der Wärmetransport durch Konvektion stark an und bei $Ra = 5000$ erhöht diese den Betrag der Wärmeleistung etwa auf das Doppelte. Bis hierhin liegen die Meßpunkte aller Flüssigkeiten trotz ihrer erheblich verschiedenen Prandtl-Zahl mit der unvermeidlichen Streuung auf derselben Kurve, d.h. wir haben eine Abhängigkeit nur von dem Produkt $Gr \cdot Pr$, wie das bei der schleichenden Bewegung der Fall ist, wo bekanntlich die Massenkräfte klein gegen die Zähigkeitskräfte sind. Bei $Ra = 30000$ ändert sich der Charakter der durch die Meßpunkte gelegten Kurve, die hier in eine gerade Linie übergeht, was auf das Turbulentwerden der Bewegungen hinweist. Schon vorher vergrössert sich die Streuung, indem die Versuchspunkte der Flüssigkeiten grosser Zähigkeit (Siliconöl AK 350, AK 3 und Glykol) höher liegen als die der Flüssigkeiten kleiner Zähigkeit (Heptan, Wasser). Diese Erscheinung ist darauf zurückzuführen, dass mit zunehmender Geschwindigkeit der turbulenten Bewegung die Massenkräfte nicht mehr vernachlässigbar klein gegen die Zähigkeitskräfte sind und damit der Bereich der schleichenden Bewegung verlassen wird. Die Wärmeübertragung hängt dann nicht mehr von dem einen Parameter des Pro-

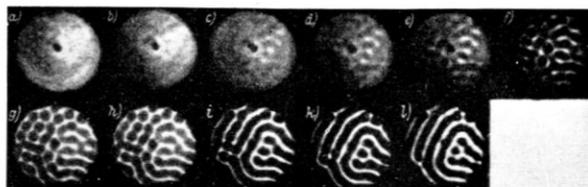


ABB. 3. Verlauf der Konvektionsmuster bei Silikonöl AK 350 von 7 mm Schichtdicke während des Aufheizvorganges

Teilbild	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
Zeit nach Beginn des Anheizens in min.	0	50	52	55	57	60	65	75,5	100	120	167
Rayleigh-Zahl	0	1590	1640	1700	1750	1800	1900	2000	2450	3010	4560

duktes $GrPr$ ab, sondern es kommt eine schwache Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl als zweitem Parameter hinzu.

Photographische Aufnahmen der Bewegungsvorgänge zeigen die Abb. 2 und 3. Dabei war die Flüssigkeitsschicht unten durch eine spiegelnde Metallplatte begrenzt und oben war sie mit einer Glasplatte bedeckt. Das von einer punktförmigen Lichtquelle gelieferte Licht wird an der spiegelnden Platte reflektiert und beim zweimaligen Durchtritt durch die Flüssigkeit je nach deren Temperatur etwas verschieden gebrochen, so dass auf einer photographischen Platte oder einem Schirm Lichtmuster entstanden. Gleich nach Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl treten reguläre Sechsecke auf, wie sie Benard beobachtete. Mit wachsender Rayleigh-Zahl schliessen sich die Zellen aber zu Streifen zusammen, denen walzenförmige Bewegungen entsprechen, wie das die Teilbilder *c* und *d* vom Abb. 2 und *i* bis *l* vom Abb. 3 zeigen.

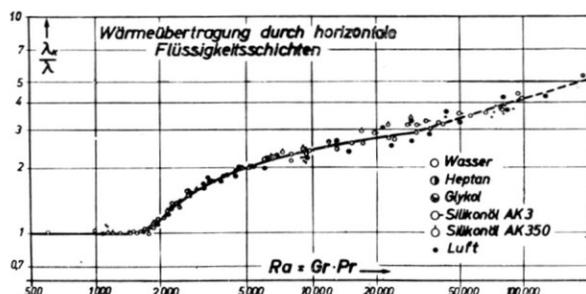


ABB. 4. Abhängigkeit des Verhältnisses λ_k/λ der scheinbaren Wärmeleitfähigkeit λ_k zur Wärmeleitfähigkeit λ der ruhenden Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl Ra .

Mit Wasser wurden die Versuche bis zu Schichtdicken von 130 mm ausgedehnt entsprechend Rayleigh-Zahlen bis zu $Ra = 10^9$, wobei sich der ganze Bereich $4 \cdot 10^4 < Ra < 10^9$ für Wasser durch die Gleichung

$$\lambda_k/\lambda = 0,145 (Ra)^{0,29}$$

gut darstellen lässt. Da in Ra die Schichtdicke in der dritten Potenz vorkommt, hängt der ganze Wärmetransport je Zeit- und Flächeneinheit nur entsprechend der Potenz $h^{-0,13}$ von der Höhe der Flüssigkeitsschicht ab; d.h. mit wachsender Länge des Transportweges vermindert sich unter sonst gleichen Verhältnissen die beförderte Wärmemenge nur wenig.

Bis zum kritischen Zustand kann man die Versuchsergebnisse aber nicht extrapolieren, weil hier der Ausdehnungskoeffizient und damit die Rayleigh-Zahl unendlich wird. Man muss also neue Versuche anstellen. Da man wegen der hohen Drücke mit ausgedehnten ebenen Schichten nur schwer arbeiten kann, wurden für diese Versuche senkrecht stehende zylindrische Rohre benutzt, die am unteren Ende elektrisch beheizt, am oberen Ende durch Wasser gekühlt waren. Abb. 5 zeigt im Schnitt ein solches Rohr von 40 mm Innendurchmesser, 56 mm Aussendurchmesser und 445 mm Länge des Hohlraumes.

Zur Heizung ist auf das untere Ende des Rohres Widerstandsband aufgewickelt und ein zweiter elektrischer Heizkörper im Kern des Rohres eingebaut. Zur Kühlung wird auf das obere konisch zugespitzte massive Verlängerungsstück des Rohres ein Wasserstrahl gerichtet, wodurch man hohe Wärmeübergangszahlen von der Grössenordnung 50000 kcal/m²h grd erreicht.

Der Hohlraum des Rohres ist mit einer Flüssigkeit in solcher Menge gefüllt, dass sie ihn bei kritischer Temperatur gerade ausfüllt. Als Stoff wurde Ammoniak (NH₃) gewählt mit dem kritischen Punkt bei 132,4°C und 115,2 at. Bei Zimmertemperatur ist nur das untere Drittel des Rohres mit Flüssigkeit, der obere Teil mit Dampf gefüllt. Bei unterkritischer Temperatur verdampft also die Flüssigkeit im unteren Teil des Rohres und der Dampf kondensiert oben und fliesst als Kondensat nach unten zurück.

An der äusseren Wand des Rohres sind Thermoelemente an den in den Bildern 5 und 7 durch die waagerechten gestrichelten Linien angegebenen Stellen angebracht, die den Temperaturverlauf längs des Rohres zu messen erlauben. Der durch das Rohr und seinen Inhalt beförderte Wärmestrom wird aus Menge und Temperaturanstieg des Kühlwassers bestimmt; er ist um die Wärmeverluste, die aber nur 2 bis 10% betragen, kleiner als die Leistung der elektrischen Heizung am unteren Rohrende. Messungen des Temperaturverlaufes längs des Rohres wurden sowohl bei kritischer als auch bei höherer und tieferer Temperatur angestellt.

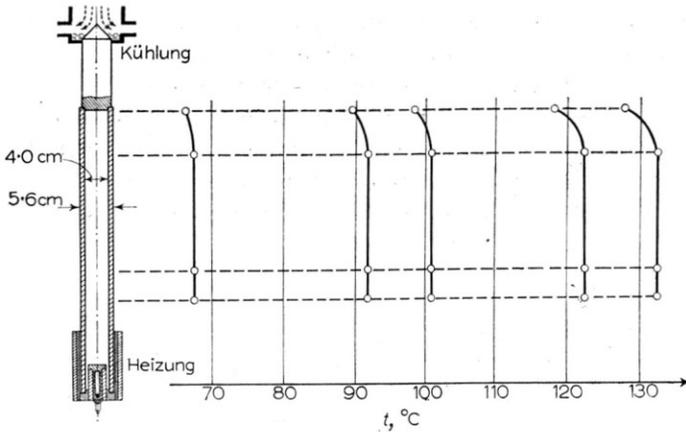


ABB. 5. Temperaturverlauf längs eines mit Ammoniak in kritischer Menge gefüllten Rohres von 4 cm Innendurchmesser, das unten geheizt und oben gekühlt wird, bei verschiedenen mittleren Temperaturen.

Die Ergebnisse sind in Abb. 5 neben dem Rohr dargestellt, sie zeigen im mittleren Teil des Rohres sehr kleine Temperaturgefälle, besonders bei kritischer Temperatur.

Berechnet man aus dem Wärmestrom, dem Temperaturgefälle und der inneren Querschnittsfläche des Rohres die *scheinbare Wärmeleit*zahl λ_k der Füllung in Abhängigkeit von ihrer mittleren Temperatur, so erhält man, wie die ausgezogene Kurve von Abb. 6 zeigt, schon bei unterkritischer Temperatur wegen der Verdampfung und Kondensation sehr

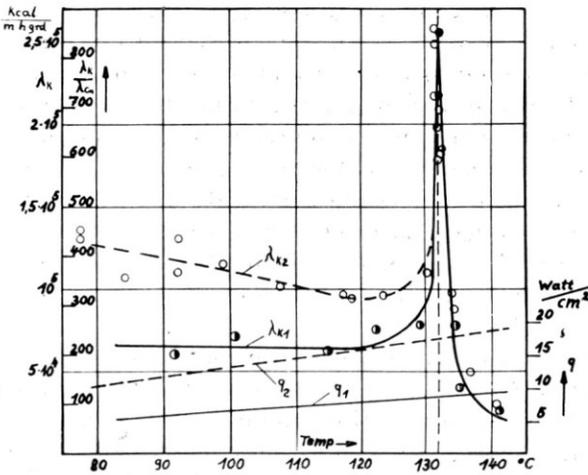


ABB. 6. Scheinbare Wärmeleit

erhebliche Werte. Aber bei der kritischen Temperatur steigt die scheinbare Wärmeleitfähigkeit auf ausserordentlich hohe Werte an, die, wie die mit λ_k/λ_{cu} bezeichnete Skala angibt, das 800 fache der Wärmeleitfähigkeit des Kupfers überschreiten. Die gestrichelte mit λ_{k_2} bezeichnete Kurve, die bei höherer Heizdichte in W/cm^2 gemessen wurde, zeigt ähnlichen Verlauf, aber mit etwas höheren Anfangswerten bei unterkritischen Temperaturen. Die Wärmestromdichte in W/cm^2 als Funktion der

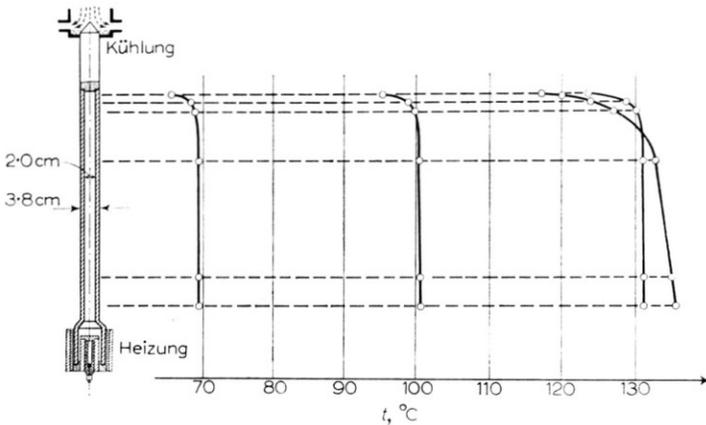


ABB. 7. Temperaturverlauf längs eines mit Ammoniak in kritischer Menge gefüllten Rohres von 2 cm Innendurchmesser, das unten geheizt und oben gekühlt wird, bei verschiedenen mittleren Temperaturen.

Temperatur ist durch die mit q_1 und q_2 bezeichneten geraden Linien dargestellt mit dem Maßstab am rechten Rand der Figur.

Um auch den Einfluss des Verhältnisses h/d von Länge und Durchmesser des Rohres zu studieren, wurde die in Abb. 7 dargestellte Apparatur mit kleinerem innerem Rohrdurchmesser gebaut und wieder der Temperaturverlauf längs des Rohres aufgenommen, diesmal auch bei einer überkritischen Temperatur. Die Ausrechnung der scheinbaren Wärmeleitfähigkeiten zeigt zwar nicht mehr ganz so hohe Werte, aber auch die charakteristische steile Spitze bei kritischer Temperatur. Bei höheren Temperaturen fällt die scheinbare Wärmeleitfähigkeit stark auf niedrige Werte ab.

Die Messungen zeigen also, dass man bei Flüssigkeiten in der Nähe ihres kritischen Zustandes ganz ausserordentlich hohe Wärmetransportleistungen durch natürliche Konvektion erzielen kann. Füllt man ein Rohr mit solcher Menge eines Stoffes, dass dieser sich bei einer bestimmten Temperatur in der Nähe seines kritischen Zustandes befindet, so verhält das Rohr sich so, als wenn es das mehrhundertfache Wärmeleitvermögen eines massiven Stabes gleichen Durchmessers aus Kupfer hätte. Die beschriebenen Versuche wurden mit Ammoniak ausgeführt.

Messungen an Wasser, die wegen der höheren Drücke und Temperaturen etwas schwieriger durchzuführen sind, führten zu ähnlichen Ergebnissen.

Die erste praktische Anwendung dieser neuen Beobachtung in der Nähe des kritischen Zustandes war die anfangs erwähnte vom Verfasser schon 1943 angewandte Kühlung von Dampfturbinenschaufeln. Hier sind die Verhältnisse wegen der ausserordentlich hohen Fliehkraftbeschleunigungen besonders günstig. Vielleicht kann man den für die Wärmeübertragung überraschend günstigen kritischen Zustand auch in

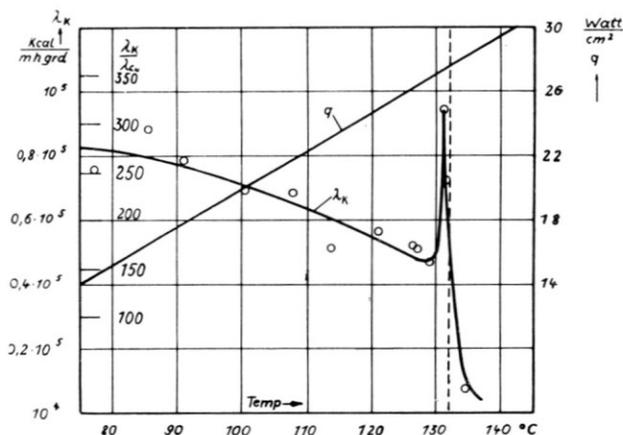


ABB. 8. Scheinbare Wärmeleitzahl der natürlichen Konvektion λ_k und Wärmestromdichte q des in Abb. 7 dargestellten Rohres in Abhängigkeit von der mittleren Temperatur des Rohrinhaltes.

anderen Fällen benutzen, wo in der Volumeneinheit grosse Wärmeleistungen umgesetzt werden. Aufgaben dieser Art sind z.B. die Kühlung von Raketenbrennkammern oder die Wärmeabfuhr bei Kernreaktoren.

Eine theoretische Untersuchung des Wärmeübergangs bei natürlicher Konvektion in einem unten geschlossenen, mit Flüssigkeit gefüllten und am ganzen Umfang geheizten Rohr hat Lighthill⁽⁹⁾ veröffentlicht und Martin⁽¹⁰⁾ bestätigte diese Überlegungen in gewissem Grade. Diese Arbeiten lassen sich aber nicht ohne weiteres auf die Verhältnisse beim kritischen Zustand des Mediums übertragen.

LITERATUR

1. J. THOMSON, *Proc. Glasgow Phil. Soc.*, Vol. 13, p. 464, 1882.
2. H. BENARD, *Rev. gén. des sci. pure appl.*, Vol. 11, pp. 1261, 1309, 1900.
3. J. W. RAYLEIGH, *Phil. Mag.* (Reihe 6), Vol. 32, pp. 529–46, 1916.
4. H. JEFFRIES, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 118, pp. 195–208, 1928.
5. A. R. LOW, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 125, pp. 180–95, 1929.

6. R. J. SCHMIDT, S. W. WILVERTON, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 152, p. 586, 1935.
7. R. J. SCHMIDT, O. A. SAUNDERS, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 165, p. 216, 1938.
8. P. L. SILVESTON, Dissertation der Technischen Hochschule München, 1957.
9. M. J. LIGHTHILL, *Quart. J. Appl. Mech. Math.*, Vol. 6, pp. 398-439, 1953.
10. B. W. MARTIN, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 230, pp. 502-30, 1955.